

试卷代号:1080

座位号

--	--

国家开放大学(中央广播电视大学)2014年春季学期“开放本科”期末考试

工程数学(本) 试题(半开卷)

2014年7月

题 号	一	二	三	四	总 分
分 数					

得 分	评卷人

一、单项选择题(每小题 3 分,共 15 分)

1. 设 A 为 n 阶方阵,则下列命题中不正确的是().
 - A. 若 $\lambda = 0$ 是 A 的一个特征值,则 $AX = O$ 必有非零解
 - B. A 与 A' 有相同的特征值
 - C. 任一方阵对应于不同特征值的特征向量是线性无关的
 - D. A 与 $2A$ 有相同的特征值
2. 设 A, B 都是 n 阶方阵,则下列命题中正确的是().
 - A. $(A + I)(A - I) = A^2 - I$
 - B. 若 $AB = O$,则 $A = O$ 或 $B = O$
 - C. 若 $AB = AC$,且 $A \neq O$,则 $B = C$
 - D. $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$
3. n 元非齐次线性方程组 $AX = b$ 有解的充分必要条件是().

- A. $r(A) < n$
 - C. $r(A) = r([A : b])$

- B. $r(A) = n$
 - D. 相应的齐次线性方程组 $AX = O$ 有解

4. 设袋中有 3 个红球, 2 个白球, 第一次取出一球后放回, 第二次再取一球, 则两次都取到白球的概率是().

A. $\frac{6}{25}$

B. $\frac{4}{25}$

C. $\frac{9}{25}$

D. $\frac{2}{5}$

5. 设 x_1, x_2, \dots, x_n 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 则()是统计量.

A. σx_1

B. $\frac{x_1 - \mu}{\sigma}$

C. $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

D. $x_n + \mu$

得 分	评卷人

二、填空题(每小题 3 分, 共 15 分)

6. 设 A 为 n 阶方阵, 若存在数 λ 和非零 n 维向量 X , 使得_____, 则称 X 为 A 相应于特征值 λ 的特征向量.

7. 设 A, B 是 3 阶方阵, 其中 $|A|=3, |B|=2$, 则 $|2A'B^{-1}|=$ _____.

8. 若 $P(A+B)=0.7, P(\overline{AB})=0.2, P(A\overline{B})=0.3$, 则 $P(AB)=$ _____.

9. 设随机变量 $X \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{bmatrix}$, 则 $P(X \neq 0)=$ _____.

10. 设随机变量 X , 若 $E(X)=3$, 则 $E(2X+1)=$ _____.

得 分	评卷人

三、计算题(每小题 16 分,共 64 分)

11. 解矩阵方程 $X = AX + B$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

12. 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 12x_4 = 0 \\ 5x_1 - 8x_2 + 6x_3 - 17x_4 = 0 \end{cases}$$

的一个基础解系和通解.

13. 设 $X \sim N(1, 9)$, 试求: (1) $P(X < 4)$; (2) 求常数 a , 使得 $P(|X - 1| < a) = 0.9974$. (已知 $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(2) = 0.9772$, $\Phi(3) = 0.9987$)

14. 某车间生产滚珠, 已知滚珠直径服从正态分布. 今从一批产品里随机取出 9 个, 测得直径平均值为 15.1mm, 若已知这批滚珠直径的方差为 0.06^2 , 试找出滚珠直径均值的置信度为 0.95 的置信区间 ($u_{0.975} = 1.96$).

得 分	评卷人

四、证明题(本题 6 分)

15. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 - 2I = O$, 试证: 方阵 $A - I$ 可逆.

试卷代号:1080

国家开放大学(中央广播电视大学)2014年春季学期“开放本科”期末考试

工程数学(本) 试题答案及评分标准(半开卷)

(供参考)

2014年7月

一、单项选择题(每小题3分,共15分)

1. D 2. A 3. C 4. B 5. C

二、填空题(每小题3分,共15分)

6. $AX = \lambda X$

7. 12

8. 0.2

9. 0.5

10. 7

三、计算题(每小题16分,共64分)

11. 解:由 $X = AX + B$ 可得 $(I - A)X = B$. ……3分

由已知可得 $(I - A) = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$. ……5分

利用初等行变换可得

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & -4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

因此, $(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$. (也可由伴随矩阵法求得) ……13分

$$\text{于是 } X = (I - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}. \quad \cdots\cdots 16 \text{ 分}$$

12. 解: 将方程组的系数矩阵化为阶梯形

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -7 \\ 2 & -3 & 1 & -5 \\ 3 & -5 & 5 & -12 \\ 5 & -8 & 6 & -17 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -7 & 9 \\ 0 & 1 & -7 & 9 \\ 0 & 2 & -14 & 18 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 & 11 \\ 0 & 1 & -7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由此知 x_3 和 x_4 为自由元. \cdots\cdots 7 \text{ 分}

令 $x_3 = 1, x_4 = 0$, 得相应的解向量

$$X_1 = (10 \quad 7 \quad 1 \quad 0)'. \quad \cdots\cdots 10 \text{ 分}$$

令 $x_3 = 0, x_4 = 1$, 得相应的解向量

$$X_2 = (-11 \quad -9 \quad 0 \quad 1)'. \quad \cdots\cdots 13 \text{ 分}$$

于是, $\{X_1, X_2\}$ 即为方程组的一个基础解系, 方程组的通解为

$$k_1 X_1 + k_2 X_2 \quad (\text{其中 } k_1, k_2 \text{ 为任意常数}) \quad \cdots\cdots 16 \text{ 分}$$

$$13. \text{ 解: (1) } P(X < 4) = P\left(\frac{X-1}{3} < \frac{4-1}{3}\right) = P\left(\frac{X-1}{3} < 1\right) = \Phi(1) = 0.8413 \quad \cdots\cdots 6 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad P(|X-1| < a) &= P\left(\left|\frac{X-1}{3}\right| < \frac{a}{3}\right) = P\left(-\frac{a}{3} < \frac{X-1}{3} < \frac{a}{3}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{a}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{a}{3}\right) = 2\Phi\left(\frac{a}{3}\right) - 1 = 0.9974 \quad \cdots\cdots 12 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\text{因此, } \Phi\left(\frac{a}{3}\right) = 0.9987. \text{ 由已知可得 } \frac{a}{3} = 3, \text{ 从而 } a = 9. \quad \cdots\cdots 16 \text{ 分}$$

14. 解: 由于已知 σ^2 , 故选取样本函数

$$U = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1) \quad \cdots\cdots 5 \text{ 分}$$

滚珠直径均值的置信度为 0.95 的置信区间为

$$\left[\bar{x} - u_{0.975} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + u_{0.975} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] \quad \cdots\cdots 10 \text{ 分}$$

由已知, $\bar{x}=15.1$, $\sigma=0.06$, $n=9$, $u_{0.975}=1.96$, 于是可得

$$\bar{x} - u_{0.975} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 15.1 - 1.96 \times \frac{0.06}{\sqrt{9}} = 15.0608,$$

$$\bar{x} + u_{0.975} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 15.1 + 1.96 \times \frac{0.06}{\sqrt{9}} = 15.1392,$$

因此, 滚珠直径均值的置信度为 0.95 的置信区间为 $[15.0608, 15.1392]$16 分

四、证明题(本题 6 分)

15. 证明: 由 $A^2 - 2I = O$ 可得

$$(A - I)(A + I) = I$$

因此, 方阵 $A - I$ 可逆, 其逆为 $A + I$6 分