

国家开放大学(中央广播电视大学)2017年春季学期“开放本科”期末考试

工程数学(本) 试题(半开卷)

2017年6月

题 号	一	二	三	四	总 分
分 数					

得 分	评卷人

一、单项选择题(每小题3分,共15分)

- 下列命题中不正确的是().
 - A 与 A' 有相同的特征多项式
 - 若 λ 是 A 的特征值,则 $(\lambda I - A)X = O$ 的非零解向量必是 A 相应于 λ 的特征向量
 - 若 $\lambda = 0$ 是 A 的一个特征值,则 $AX = O$ 必有非零解
 - A 的特征向量的线性组合仍为 A 的特征向量
- 若 A 是对称矩阵,则等式()成立.
 - $AA' = I$
 - $A' = A$
 - $A' = A^{-1}$
 - $A^{-1} = A$
- n 元非齐次线性方程组 $AX = b$ 有解的充分必要条件是().
 - $r(A) < n$
 - $r(A) = n$
 - $r(A) = r([A : b])$
 - 相应的齐次线性方程组 $AX = O$ 有解

4. 设袋中有 6 只红球, 4 只白球, 从其中不放回地任取两次, 每次取 1 只, 则两次都取到红球的概率是().

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{9}{25}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{3}{10}$

5. 设 A, B 是两个随机事件, 则下列等式中正确的是().

A. $P(AB) = P(A)P(B)$

B. $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

C. $P(A+B) = P(A) + P(B)$

D. $P(AB) = P(B)P(B|A)$

得 分	评卷人

二、填空题(每小题 3 分, 共 15 分)

6. 当 $\lambda =$ _____ 时, 方程组
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ -2x_1 + \lambda x_2 = -2 \end{cases}$$
 有无穷多解.

7. 设 A 为 n 阶方阵, 若存在数 λ 和非零 n 维向量 X , 使得 $AX = \lambda X$, 则称数 λ 为 A 的 _____.

8. 若 $P(A+B) = 0.7, P(\bar{A}B) = 0.2, P(A\bar{B}) = 0.3$, 则 $P(AB) =$ _____.

9. 设随机变量 $X \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.3 & 0.4 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$, 则 $P(X < 3) =$ _____.

10. 设随机变量 X , 若 $D(X) = 2$, 则 $D(3X+2) =$ _____.

得 分	评卷人

三、计算题(每小题 16 分,共 64 分)

11. 解矩阵方程 $X=AX+B$, 其中 $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

12. 求线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 13 \\ 4x_1 - x_2 + 9x_3 = -6 \end{cases}$$

的通解.

13. 设 $X \sim N(2, 3^2)$, 试求: (1) $P(-4 < X < 5)$; (2) $P(X > -1)$. (已知 $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(2) = 0.9772$, $\Phi(3) = 0.9987$)

14. 设某种零件长度 X 服从正态分布 $N(\mu, 2.25)$, 今从中任取 100 个零件抽检, 测得平均长度为 84.5cm, 试求此零件长度总体均值的置信度为 0.95 的置信区间($u_{0.975} = 1.96$).

得 分	评卷人

四、证明题(本题 6 分)

15. 设 A 为 n 阶方阵, 且满足 $AA' = I$, $|A| = -1$, 证明 $|I + A| = 0$.

试卷代号:1080

国家开放大学(中央广播电视大学)2017年春季学期“开放本科”期末考试

工程数学(本) 试题答案及评分标准(半开卷)

(供参考)

2017年6月

一、单项选择题(每小题3分,共15分)

1. D 2. B 3. C 4. A 5. B

二、填空题(每小题3分,共15分)

6. 2
7. 特征值
8. 0.2
9. 0.7
10. 18

三、计算题(每小题16分,共64分)

11. 解:由 $X=AX+B$ 可得 $(I-A)X=B$(3分)

由已知可得 $(I-A)=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$(5分)

利用初等行变换可得

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & -4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

因此, $(I-A)^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$. (也可由伴随矩阵法求得)(13分)

$$\text{于是, } X = (I - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}. \quad \dots\dots(16 \text{ 分})$$

12. 解: 将方程组的增广矩阵化为阶梯形

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \\ 4 & -1 & 9 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 7 & -7 & 14 \\ 0 & 14 & -14 & 28 \\ 0 & 7 & -7 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{方程组的一般解为 } \begin{cases} x_1 = -2x_3 - 1 \\ x_2 = x_3 + 2 \end{cases} \quad (\text{其中 } x_3 \text{ 为自由元}). \quad \dots\dots(7 \text{ 分})$$

$$\text{令 } x_3 = 0, \text{ 得到方程组的一个特解为 } X_0 = (-1 \ 2 \ 0)'. \quad \dots\dots(10 \text{ 分})$$

不计最后一列, 令 $x_3 = 1$, 得到相应的齐次线性方程组的一个基础解系

$$X_1 = (-2 \ 1 \ 1)' \quad \dots\dots(13 \text{ 分})$$

$$\text{于是, 方程组的通解为 } X = X_0 + kX_1 \quad (\text{其中 } k \text{ 为任意常数}). \quad \dots\dots(16 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} 13. \text{ 解: (1)} P(-4 < X < 5) &= P\left(\frac{-4-2}{3} < \frac{X-2}{3} < \frac{5-2}{3}\right) = P\left(-2 < \frac{X-2}{3} < 1\right) \\ &= \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) - (1 - \Phi(2)) \\ &= 0.8413 - (1 - 0.9772) = 0.8185 \quad \dots\dots(8 \text{ 分}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) P(X > -1) &= P\left(\frac{X-2}{3} > \frac{-1-2}{3}\right) = P\left(\frac{X-2}{3} > -1\right) = \Phi(1) = 0.8413 \\ &\dots\dots(16 \text{ 分}) \end{aligned}$$

14. 解: 由于已知 σ^2 , 故选取样本函数

$$U = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1) \quad \dots\dots(5 \text{ 分})$$

零件长度总体均值的置信度为 0.95 的置信区间为

$$\left[\bar{x} - u_{0.975} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + u_{0.975} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] \quad \dots\dots(10 \text{ 分})$$

由已知, $\bar{x}=84.5, \sigma=1.5, n=100, u_{0.975}=1.96$, 于是可得

$$\bar{x} - u_{0.975} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 84.5 - 1.96 \times \frac{1.5}{\sqrt{100}} = 84.206,$$

$$\bar{x} + u_{0.975} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 84.5 + 1.96 \times \frac{1.5}{\sqrt{100}} = 84.794,$$

因此, 此零件长度总体均值的置信度为 0.95 的置信区间为 $[84.206, 84.794]$.

.....(16 分)

四、证明题(本题 6 分)

15. 证明: 因为

$$|I+A| = |AA'+A| = |A(A'+I)| = |A||A'+I| = |A||I+A| = -|I+A|$$

所以 $|I+A|=0$.

.....(6 分)